Российский национальный комитет по автоматическому управлению
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Сочинский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Universitetet i Tromsø

Тезисы докладов международной конференции

КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

посвященной
90-летию со дня рождения М.А. Акивиса
и
70-летию со дня рождения А.М. Шелехова
Сочи, 3 – 10 мая 2013 г.

Abstracts of the International Conference

COMPUTER AND ANALYTICAL METHODS IN CONTROL SCIENCES AND MATHEMATICAL PHYSICS

In honor of
M.A. Akivis on his 90th birthday
and
A.M Shelekhov on his 70th birthday
Sochi, 3 — 10 May 2013

Сочи – 2013

Тезисы докладов международной конференции

КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

под редакцией

А. Г. Кушнера и **В. В. Лычагина**

Тезисы содержат результаты исследований участников международной конференции в области геометрии, топологии, дифференциальных уравнений и управлении. Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов.

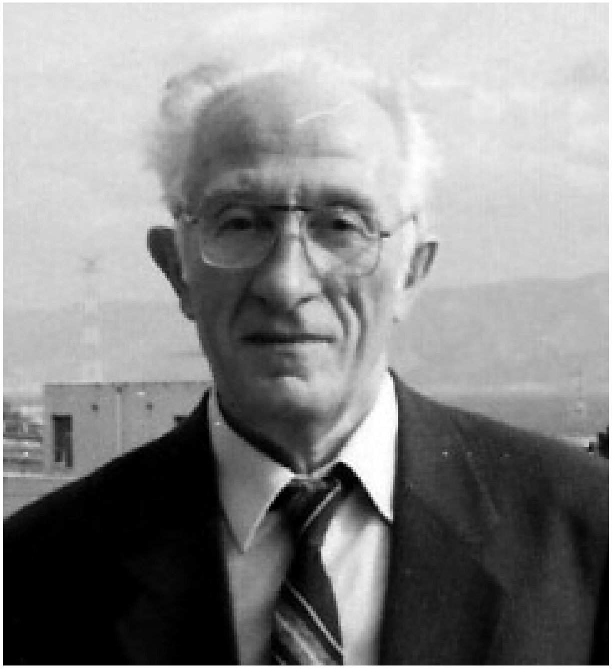
Международный научный комитет: Лычагин В.В. — председатель, Алексеевский Д.В., Ахметзянов А.В., Коновенко Н.Г., Красильщик И.С., Кругликов Б.С., Кушнер А.Г., Литвинов Г.Л., Роджер С., Романова Г.М., Рубцов В.Н., Самохин А.В., Толстихина Г.А. Шарко В.В., Шелехов А.М., Шурыгин В.В., Юмагужин В.А.

Организационный комитет: Кушнер А.Г. – председатель, Ахметзянов А.В. – зам. председателя, Тычков С.Н.

Административно-Организационный комитет: Симонян А.Р.– председатель, Улитина Е.И. – зам. председателя, Симаворян С.Ж.

TEX-нический редактор Е.Н. Кушнер.

ЮБИЛЕИ



М. А. Акивис

А. М. Шелехов

30 октября 2012 года исполнилось 70 лет профессору Александру Михайловичу Шелехову, а 5 января 2013 года — 90 лет профессору Максу Айзиковичу Акивису.

Участники конференции поздравляют их с юбилеями и желают здоровья, счастья и дальнейших творческих успехов.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СВЯЗНОСТИ И КРИВИЗНЫ СФЕРИЧЕСКОГО СУПЕРПРОСТРАНСТВА В СИСТЕМЕ MAPLE

А. В. Аминова
(Кафедра теории относительности и гравитации, Казанский Федеральный Университет)
E-mail address: asya.aminova@kpfu.ru, avaminova@gmail.com

М. Х. Люлинский
(Кафедра теории относительности и гравитации, Казанский Федеральный Университет)
E-mail address: miklul@rambler.ru

Ареной действия современных физических теорий являются пространства с экзотическими свойствами. Прежде всего это относится к теориям гравитации и физики элементарных частиц, где применяется аппарат клиффордовых алгебр. Теория супермногообразий возникла благодаря открытию суперсимметрии. Фундаментальными в этом направлении стали работы Гольфанда и Лихтмана, Волкова и Акулова, Весса и Зумино. Замечательно, что суперсимметрия связала инвариантность относительно преобразований группы Пуанкаре, т. е. группы пространственно-временных преобразований, с внутренними симметриями. Благодаря этому возникли новая теория тяготения – супергравитация и теория суперструн, которая является кандидатом на роль единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия в природе.

Данная работа посвящена построению суперсимметричных космологических моделей в рамках последовательного суперсимметричного подхода, развитого в работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова.

Последовательный суперсимметричный подход в теории гравитации означает, что супергеометрия определяется суперсимметричными свойствами пространства. Этот подход требует развития инвариантно-групповых методов супергравитации. В этом направлении не только практически отсутствовали конкретные результаты, но не были также сформулированы сами принципы, которые должны лежать в основе связи между суперсимметрией и супергеометрией. Первые шаги в этом направлении были сделаны в уже упоминавшихся работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова. Настоящая работа развивает это направление.

Мы рассматриваем суперсимметрию как автоморфизм супергеометрической структуры, в частности, как инфинитезимальное суперпреобразование, оставляющее неизменной метрику суперпространства. Метрика определяется как инвариант супергруппы преобразований в духе программы Ф. Клейна, идея которой заключается в рассмотрении симметрии, или группы преобразований как основы определения геометрии пространства. В работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова была получена суперметрика сферически симметричного супермногообразия. В данной работе вычисляются согласованная с суперметрикой связность и кривизна этого суперпространства. С этой целью разработана программа для среды Maple 16.00. В ней реализованы алгоритмы корректной работы с (супер)тензорными индексами. Написаны модифицированные процедуры дифференцирования однородных компонент (супер)тензоров.

[1] Д. А. Лейтес. Введение в теорию супермногообразий // УМН, 1980, т. 35, вып. 1(211).

[2] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования // М.: Наука, 1965.

[3] А. В. Аминова, С. В. Мочалов. Метрика суперпространства Минковского как инвариант супергруппы Пуанкаре // Изв. Высш. Учеб. Завед. Мат., 1994, no. 3, 10–16.

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

А.В. Ахметзянов

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: awa@ipu.rssi.ru

Процессы управления в сложных многосвязных системах большой размерности описываются нелинейными уравнениями математической физики определенными в пространстве состояний, где заданы начальные и граничные (внутренние и внешние) условия I, II и III родов. В частности, для многих объектов управления распределения температуры, давления, насыщенности, концентрации и др. в многосвязной области $\Omega \subset R^3$ пространства состояний определяется решением начально-краевой задачи для нелинейного уравнения

[1] Поддержано грантом РФФИ №12-08-01238-а

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(L(T))\,\mathrm{grad}T + f(t,x), \quad x \in \Omega,$$
$$T|_{t=0} = T_0(x), \quad x \in \Omega; \quad T|_{\Gamma_j} = T_j(t), \quad j = \overline{1,n}; \quad \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_0} = 0.$$

С помощью подстановки (преобразования) Кирхгофа [1] эта задача может быть преобразована к более простому виду, $\chi(\widetilde{T})\dfrac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} = \mathrm{divgrad}\widetilde{T} + \widetilde{f}(x,t)$, где $L(\widetilde{T}) \equiv 1$. Модели многосвязных систем, т.е. решения начально-краевых задач для упрощенных нелинейных параболических уравнений можно построить с использованием методов теории возмущения.

Например, для уравнения фильтрации реального газа в резервуарах месторождений газа, если пренебречь малыми гравитационными силами, изотермическая неустановившаяся фильтрация природного газа в не деформируемых пористых средах определяется решением начально-краевой задачи для нелинейного уравнения параболического типа

$$\begin{gathered} \chi(P)\frac{\partial P}{\partial t} = \mathrm{divgrad}P, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \\ Q_j^{\text{зад}} = 2\pi r_j \mu^{-1} h_j Q(x)\big|_{\partial\omega_j}, \quad j = \overline{1,N}, \quad P(x,t)|_{t=0} = P_{\text{н}}(x), \end{gathered} \tag{1}$$

где $Q(x)|_{\partial\omega_j} = \left(\dfrac{p\partial p}{\partial r}\Big/ RTz(p)\right)_{\partial\omega_j}$ – дебит газа из скважины, h_j – высота зоны притока газа в j-ю скважину, $\partial\omega_j$ – контур j-й скважины с радиусом $r = r_j$, $x \in \Omega \subset R^3$ – декартовы координаты точек резервуара газового месторождения Ω, k и m – проницаемость и пористость породы газового резервуара, $p = p(x,t)$ – давление газа в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t > 0$, $P = P(p)$ – подстановка Кирхгофа и $\chi(P)$ определяются баротропными свойствами газа.

Нелинейная функция $\chi(P)$, входящая в левую часть уравнения фильтрации, является аналитической и может быть разложена в степенной ряд. Поэтому начально-краевой задаче (1) можно поставить в соответствие эквивалентную последовательность линейных начально-краевых задач для невозмущенного и последовательности возмущенных уравнений, построенных с использованием методов теории возмущений [2]. После дискретизации по пространственным переменным и преобразований, необходимых для учета граничных условий, эта последовательность преобразуется к задачам Коши для линейных эволюционных уравнений вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_0}{\partial t} + Au_0 = 0, \quad u(x,0) = u^0(x); \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} + Av_j = f_j, \quad v_j(x,0) = 0, \quad j \geq 1, \end{gathered} \tag{2}$$

где A – линейный положительный оператор.

[1] Л. А. Коздоба. *Решения нелинейных задач теплопроводности.* - Киев, 1976.

[2] В. И. Агошков, П. Б. Дубовский, В. П. Шутяев *Методы решения задач математической физики.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

ТОЧЕЧНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЛИ В ПРОСТРАНСТВАХ ДЖЕТОВ

П. В. Бибиков
(ИПУ РАН, Москва, Россия)
E-mail address: tsdtp4u@proc.ru

Целью данной работы является построение точечной классификации векторных полей Ли на пространствах k-джетов $J^k\mathbb{R}^n$ функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для произвольных k и n. Отметим, что векторные поля Ли в окрестности неособой точки контактно эквивалентны, а В.В. Лычагин показал (см. [4]), что при выполнении определенных условий орбита ростка векторного поля Ли в окрестности особой точки относительно псевдогруппыгруппы контактных диффеоморфизмов определяется струей поля достаточно высокого порядка.

Прежде всего заметим, что согласно теореме Ли-Бэклунда (см. [1]), каждое векторное поле Ли в пространстве k-джетов является поднятием контактного векторного поля на пространстве 1-джетов. Поэтому достаточно классифицировать контактные векторные поля на пространствах 1-джетов.

Пусть $\mathcal{C}\colon \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta$ — распределение Картана на $J^1\mathbb{R}^n$. Назовем *контактной формой* линейную форму $\alpha_\theta \in T^*(J^1\mathbb{R}^n)$, такую, что $\ker \alpha_\theta = \mathcal{C}_\theta$.

Определение 1. Симплектизацией $\mathrm{Symp}(J^1\mathbb{R}^n)$ *контактного пространства $J^1\mathbb{R}^n$ называется множество всех контактных форм α_θ (см. [2]).*

Симплектизация $\mathrm{Symp}(J^1\mathbb{R}^n)$ допускает естественную структуру $\Omega := d\omega$ симплектического пространства, где ω — каноническая дифференциальная 1-форма, аналогичная форме “$p\,dq$” из гамильтоновой механики (см. [2]).

Возникает естественное расслоение $\pi\colon \mathrm{Symp}(J^1\mathbb{R}^n) \to J^0\mathbb{R}^n$. На слое этого расслоения гомотетиями действует группа $\mathbb{R}^*$.

Точечные преобразования пространства $J^1\mathbb{R}^n$ поднимаются до симплектоморфизмов расслоения π (линейно действующих на слоях π), а контактные векторные поля на $J^1\mathbb{R}^n$ поднимаются до гамильтоновых векторных полей, чьи гамильтонианы однородны по слоям расслоения π. Таким образом, проблема точечной классификации контактных векторных полей свелась к задаче классификации однородных функций относительно действия псевдогруппы симплектоморфизмов, сохраняющих базу $J^0\mathbb{R}^n$.

Эта задача решается с использованием методов, изложенных в [3] и использованных для классификации линейных действий алгебраических групп.

[1] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. – М.: "ВИНИТИ". – **28**. – 1988. – 289 С.

[2] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М. Наука, 1979.

[3] Бибиков П.В., Лычагин В.В. Классификация линейных действий алгебраических групп на пространствах однородных форм // ДАН. 2012, т.4421, вып.6, с. 732–735.

[4] Лычагин В.В. О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов // Мат. сб. 1977, **104**(2), с. 248–270.

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В MAPLE[2]

А. Горинов

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: `antong@t-human.com`

В докладе представленна компьютерная программа для визуализации многозначных решений квазилинейного дифференциального уравнения

$$v_t + (H(x,y,v))_x + (G(x,y,v))_y = 0, \tag{1}$$

представляющее собой обобщение уравнения Эйлера на случай двух пространственных переменных.

Уравнение (1) определяет гиперповерхность

$$\mathcal{E} = \left\{ F = p_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial G}{\partial q_3} + p_2 \frac{\partial H}{\partial u} + p_3 \frac{\partial G}{\partial u} = 0 \right\}$$

[2]Поддержано грантом РФФИ №12-08-01238-а

в пространстве 1-джетов. Здесь $q_1, q_2, q_3, u, p_1, p_2, p_3$ — канонические координаты в пространстве 1-джетов.

Программа тестировалась на уравнении

$$v_t + (e^{-(v-2.5)^2})_x + (e^{-(v-1.5)^2})_y = 0$$

и начальных данных

$$v|_{t=0} = 3e^{-x^2-y^2}.$$

[1] А.А. Горинов. Построение многозначных решений систем Якоби в Maple // Тезисы докладов международной конференции "Геометрия. Инварианты. Управление". Москва, 17-21 декабря 2012г. С. 33.

[2] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

[3] Lychagin V. V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. – **3**. P. 135–173 (1985)

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. В. Гребенникова

(Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия)

E-mail address: `giv001@mail.ru`

Рассматриваются процессы, математическими моделями которых являются управляемые сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$):

$$M(\mu)dz/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = \mathrm{diag}(E_n, \mu E_m)$, где E_k — единичная $k \times k$ матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 — выпуклый компакт в R^{n+m}; $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ — решение исходной системы, исходящее из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

[1] А.Б. Куржанский. Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М.: Наука, (1977).

[2] И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием при квадратичных ограничениях // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. Т. 11, вып. 3, ч. 1 (2011) 8–15.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Д.С. Гриценко

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: `zishihuandi@gmail.com`

О.М. Кирюхин

(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: `kiryukhin@physics.msu.ru`

В докладе рассматривается задача классификации параметрических уравнений колебаний

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y, u) = 0, \tag{1}$$

со скалярным управляющим параметром u относительно преобразований обратной связи

$$\varphi : (x, y, u) \longmapsto (X(x, y), Y(x, y), U(u)). \tag{2}$$

Построим тривиальное векторное расслоение с базой $\mathbb{R}^3$:

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \pi : (y, u, z) \mapsto (y, u).$$

Сечениями этого расслоения являются гладкие функции: $s_f : (y, u) \mapsto (y, u, f(y, u))$. Дифференциальные инварианты сечений этого расслоения относительно псевдогруппы Ли, порожденной векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y_3 = z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_4 = H(u)\frac{\partial}{\partial u},$$

являются инвариантами уравнений (1).

Теорема 1. *Уравнение (1) локально эквивалентно уравнению*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + b(u)y^n = 0$$

относительно преобразований обратной связи тогда и только тогда, когда

$$J_{21} = \frac{n-1}{n}, \quad J_{22} = 1, \quad J_{31} = \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2}, \quad J_{32} = \frac{n-1}{n}, \quad J_{33} = 0.$$

Здесь

$$J_{21} = \frac{z_{yy}z}{z_y^2}, J_{22} = \frac{z_{yu}z}{z_y z_u}, J_{31} = \frac{z_{yyy}z^2}{z_y^3}, J_{32} = \frac{z_{yyu}z^2}{z_y^2 z_u}, J_{33} = \frac{(z_u z_{yuu} - z_{yu}z_{uu})z^2}{z_u^3 z_y}$$

— дифференциальные инварианты уравнений (1) относительно преобразований обратной связи.

[1] Kushner A., Lychagin V. Petrov Invariants for 1-D Control Hamiltonian Systems // Global and Stochastic Analysis. 2012. Vol. 2, No. 1. P. 241–264.

[2] Гриценко Д.С., Кирюхин О.М. Дифференциальные инварианты квазигармонических уравнений колебаний с управляющим параметром // Тезисы докладов международной конференции “Геометрические методы в физике и теории управления”, 17–23 декабря 2012, Москва. С. 34.

[3] Гриценко Д.С., Кирюхин О.М. Классификация уравнений колебаний относительно преобразований обратной связи // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / Секция «Физика» / Подсекция «Математическое моделирование», 8–13 апреля 2013, Москва. М.: Макс Пресс. 2013.

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И.А. Ильин
(Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН)

Д.С. Нощенко
(Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга)

А.С. Пережогин
(Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН)
(Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга)
E-mail address: d72156@gmail.com

Математическое моделирование физических процессов, которые обладают фрактальными свойствами, выполняется с помощью аппарата дробного дифференцирования. Круг физических задач, в которых возникают операторы дробного дифференцирования, достаточно широк, начиная от задач теории упругости до диффузионно-волновых процессов [1, 2]. При этом возможны различные определения оператора дробного дифференцирования.

В настоящей работе на основе разностного оператора для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка построена вычислительная процедура для нецелого порядка $\alpha = \frac{1}{2}$ [3]. Рассмотрена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Прямое вычисление дробной степени из матрицы в системе линейных алгебраических уравнений не дает регулярного в начальной точке решения. Решение зависит от выбора шага дискретизации вычислительной схемы. Пример такой системы с показателем дробности $\alpha = \frac{1}{2}$, имеющей нерегулярное решение в начальной точке, представлен формулой (1).

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -.5 & 1 & 0 & 0 \\ -.125 & -.5 & 1 & 0 \\ -.0625 & -.125 & -.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\tau}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

В связи с особенностью в начальной точке, был предложен подход, который позволяет регуляризировать систему линейных алгебраических уравнений так, что полученное численное решение хорошо согласуется с решением задачи Коши для уравнения с дробной производной Капуто при показателе дробности $\alpha = \frac{1}{2}$ и начальном условии на функцию.

Для случая $\alpha = \frac{1}{2}$ установлено, что предложенная схема вычислений на основе дробной степени матрицы, которая является дискретным аналогом оператора дифференцирования, дает совпадающее с аналитическим решение для уравнения первого порядка с дробной производной Капуто. Вычислительная схема может быть обобщена на случай любого рационального значения дробной степени оператора.

[1] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[2] Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Москва, Ижевск: РХД, 2011. – 568 с.

[3] И.А. Ильин, Д.С. Нощенко, А.С. Пережогин О дробной степени разностного оператора для обыкновенного дифференциального уравнения // Сборник докладов Второй международной конференции молодых ученых “Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики”. С. 107-109

НЕАБЕЛЕВЫ АЛГЕБРОИДЫ ЛИ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ БЕСКОНЕЧНЫХ СТРУЙ

А. В. Киселёв

(University of Groningen, Groningen, The Netherlands)

E-mail address: `A.V.Kiselev@rug.nl`

А. О. Крутов

(Ивановский государственный энергетический университет, Иваново, Россия)

E-mail address: `krutov@math.ispu.ru`

Представления нулевой кривизны для дифференциальных уравнений в частных производных (например, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния) образуют естественный класс неабелевых алгеброидов Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли с базисом $e_1, \ldots, e_d$ (всякое $\mathfrak{g}$-значное представление нулевой кривизны есть дифференциальная 1-форма $\alpha = \alpha_i^k e_k\, dx^i$, удовлетворяющая уравнению Маурера–Картана, здесь α_i^k — гладкие функции на уравнении, x^i — независимые переменные, задающие точки базы M^n). Возьмём расслоения $\chi\colon \Lambda^1(M^n) \otimes \mathfrak{g} \to M^n$ и $\xi\colon M^n \times \mathfrak{g} \to M^n$ со слоем

$\mathfrak{g}$ над M^n; определим суперрасслоение $\Pi\xi$ как расслоение над той же базой, получаемое заменой чётности координат в слоях ξ. Теперь рассмотрим сумму Уитни $J^\infty(\chi)\times_{M^n} J^\infty(\Pi\xi)$ расслоений бесконечных струй сечений расслоения χ и нечётного расслоения $\Pi\xi$. Всякому $\mathfrak{g}$-значному представлению нулевой кривизны α соответствует теория когомологий, дифференциал в которой есть реализация [1, 2] неабелева алгеброида Ли в терминах нечётного эволюционного поля Q.

Предложение 1. *Гомологическое векторное поле Q, задающее структуру неабелева алгеброида Ли, равно*

$$Q = \partial^{(\alpha)}_{[b,\alpha]+d_h b} + \frac{1}{2}\partial^{(b)}_{[b,b]}, \qquad [Q,Q]=0 \quad\Longleftrightarrow\quad Q^2=0,$$

где $\alpha = (\alpha^k_\mu)$ — чётные координаты вдоль слоёв χ, соответствующие $\mathfrak{g}$-значным 1-формам; $b=(b^k)$ — нечётные координаты вдоль слоёв в $\Pi\xi$; c^k_{ij} — структурные константы в $\mathfrak{g}$, $[b^i,b^j]^k = c^k_{ij}b^ib^j$; d_h — горизонтальный дифференциал, наследуемый с базы M^n; оператор $\partial_\alpha = d_h + [\cdot,\alpha]$ — якорь, $[b,\alpha]^k = c^k_{ij}b^i\alpha^j_a\,dx^a$; $\partial^{(\alpha)}$ и $\partial^{(b)}$ — эволюционные производные.

Оператор $\bar\partial_\alpha = \bar d_h + [\cdot,\alpha]$ является тем самым дифференциалом, который построил М. Марван [4] при исследовании неустранимости калибровочными преобразованиями спектрального параметра в представлениях нулевой кривизны. Построенный объект иллюстрирует, в неабелевом случае, классическую конструкцию алгеброида Ли в контексте пространств бесконечных струй [3].

[1] А. Ю Вайнтроб. Алгеброиды Ли и гомологические векторные поля // УМН, **52**:2(314) (1997) 161–162.

[2] А. В. Киселёв, Й. В. ван де Лёр. Вариационные алгеброиды Ли и гомологические эволюционные векторные поля // ТМФ, **167**:3 (2011) 432–447, `arXiv:math.DG/1006.4227`

[3] M. Alexandrov, A. Schwarz, O. Zaboronsky, M. Kontsevich. The geometry of the master equation and topological quantum field theory // Int. J. Modern Phys., **A12**:7 (1997) 1405–1429, `arXiv:hep-th/9502010`

[4] M. Marvan. On the horizontal gauge cohomology and non-removability of the spectral parameter // Acta Appl. Math., **72** (2002) 51–65.

ВРЕМЕННЫЕ АСИНХРОННЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ ПЕТРИ

Е.С. Кудряшова
(Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
Комсомольск-на-Амуре, Россия)
E-mail address: ekatt@inbox.ru

Работа посвящена временным оценкам вычислительных процессов, моделируемым с помощью трасс в асинхронных системах.

Асинхронной системой $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ называется пятерка, состоящая из множества S *состояний*, *начального состояния* $s_0 \in S$, множества E *событий*, симметричного антирефлексивного *отношения независимости* $I \subseteq E \times E$ и множества *переходов* $Tran \subseteq S \times E \times S$, элементы которого удовлетворяют следующим условиям

1. $(s, e, s_1) \in Tran$ & $(s, e, s_2) \in Tran \Rightarrow s_1 = s_2$;

2. $(s, e_1, s_1) \in Tran$ & $(s_1, e_2, s_2) \in Tran \Rightarrow$ существует s' для которого $(s_1, e_2, s') \in Tran$ & $(s', e_1, s_2) \in Tran$.

Морфизмы асинхронных систем $A \to A'$ определяются как пары (η, σ), состоящие из отображения $\sigma : S \to S'$ и частичного отображения $\eta : E \to E'$, удовлетворяющих некоторым условиям сохранения отношения независимости и переводящих переходы в переходы [1].

В работе [2] исследовались морфизмы, в которых отображение η сопоставляет каждому событию произведение попарно независимых событий. В данной работе изучаются морфизмы, в которых это отображение сопоставляет каждому событию произведение произвольных событий и продолжается до гомоморфизма моноида трасс.

Функцией времени на асинхронной системе A называется отображение $\tau : E \to N = \{0, 1, 2, ...\}$. В данной работе моделируются переходы с помощью разложения их в композицию переходов, выполняющихся за единичное время. Это позволяет получить алгоритм нахождения минимального времени выполнения трассы с помощью нормальной формы Фоаты.

Для обоснования полученной математической модели временной вычислительной системы разработано программное обеспечение, вычисляющее время работы сети Петри.

[1] M. Bednarczyk. Categories of Asynchronous Systems // University of Sussex, Brighton. (1987) 230p.

[2] M.A. Bednarczyk, L. Bernardinello, B. Caillaud, W. Pawlowski, L. Pomello. Modular System Development with Pullbacks // Applications and Theory of Petri Nets 2003, Lecture Notes in Computer Science. **2679**, Springer-Verlag, Berlin. (2003) 140–160.

КЛАССИФИКАЦИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ[3]

А.Г. Кушнер
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН и Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)
E-mail address: `kushnera@mail.ru`

В.В. Лычагин
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия и Университет Тромсе, Тромсе, Норвегия)
E-mail address: `valentin.lychagin@uit.no`

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

с гамильтонианом $H = H(q,p,u)$, где фазовые переменные q — векторно-значные функции от одной независимой переменной t, а u — векторный управляющий параметр. В докладе мы рассматриваем проблему локальной эквивалентности систем таких относительно преобразований вида $(q,p,u) \mapsto (Q(q,p), P(q,p), U(u))$, где $(q,p) \mapsto (Q(q,p), P(q,p))$ — симплектическое преобразование и $u \mapsto U(u)$ — диффеоморфизм. Такие преобразования сохраняют класс гамильтоновых систем и мы будем называть их *симплектическими преобразованиями обратной связи*.

В работе [1] построена алгебра дифференциальных инвариантов и решена проблема эквивалентности для систем со скалярным управляющим параметром. В данном докладе её результаты обобщаются на системы с векторным управляющим параметром.

[1] А.Г. Кушнер, В.В. Лычагин. Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром // Автоматика и телемеханика, №3, 2013.

[3]Поддержано грантами РФФИ №№11-01-93106-НЦНИЛ_а, 12-01-00886-а, 12-08-01238-а

ОБОБЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА

Е.Н. Кушнер

(Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия)

E-mail address: `ekushner@ro.ru`

Систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$u_t + A(u,v)u_x = 0, \quad v_t + A(u,v)v_x = 0$$

будем называть *обобщенной системой Эйлера.* Здесь u, v — неизвестные функции от независимых переменных t, x.

Пусть $J^1(2,2)$ — пространство 1-джетов гладких отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ и $t, x, u, v, u_t, u_x, v_t, v_x$ — координаты на этом пространстве. Распределение Картана на $J^1(2,2)$ шестимерно и порождено двумя дифференциальными 1-формами $\omega_1 = du - u_t dt - u_x dx$ и $\omega_2 = dv - v_t dt - v_x dx$.

Система порождает шестимерную поверхность $\mathcal{E}$ в пространстве $J^1(2,2)$. Многозначные решения системы — это лежащие на $\mathcal{E}$ двумерные интегральные многообразия распределения Картана.

Векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x}$$

на пространстве $J^0(2,2)$ назовем *характеристическим.* Продолжение характеристического векторного поля в пространство 1-джетов $J^1(2,2)$ касается поверхности $\mathcal{E}$.

Кривую $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ будем называть *кривой Коши*, если интегральные кривые характеристического векторного поля пересекают ее трансверсально.

Рассмотрим обобщенную задачу Коши. Пусть $\mathcal{K}$ — кривая Коши для уравнения $\mathcal{E}$. Найти многозначное решение L, такое, что $L \supset \mathcal{K}$.

Следующая теорема указывает способ построения таких решений.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — кривая Коши для уравнения $\mathcal{E}$. Поверхность*

$$L = \bigcup_{s \in I} \varphi_s(\mathcal{K})$$

является многозначным решением обобщенной задачи Коши для обобщенной системы Эйлера. Здесь φ_s — преобразование сдвига вдоль векторного поля $X^{(1)}$.

Отметим, что для обобщенных систем Эйлера особенности многозначных решений могут быть довольно сложными. Уже в случае когда $A = u$ получается поверхность с самопересечениями типа “ласточкин хвост”.

Способ построения многозначных решений уравнений Эйлера см. в [1].

[1] Lychagin V. V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. – **3**. P. 135–173 (1985)

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СВОБОДНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ СУБРИМАНОВОЙ СТРУКТУРЫ С ВЕКТОРОМ РОСТА $(2, 3, 5, 8)$

Ю.Л. Сачков

(Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия)

E-mail address: `sachkov@sys.botik.ru`

Субриманова структура на гладком многообразии M — это гладкое подрасслоение $D \subset TM$ постоянного ранга, вместе с заданным на D скалярным произведением g. В докладе будут рассмотрены левоинвариантные субримановы структуры (D, g) на группах Ли. В этом случае векторные поля $X_1, \ldots, X_k$, задающие (D, g) как ортонормированный репер, являются левоинвариантными на некоторой связной односвязной группе Ли G с алгеброй Ли L (при этом $X_1, \ldots, X_k$ порождают алгебру Ли L). Будет рассмотрен случай, когда L есть свободная нильпотентная алгебра Ли L_2^r с двумя образующими длины r (т.е. все скобки Ли порядка $> r$ в L_2^r равны нулю).

В случае $r = 1$ получаем Евклидову геометрию на плоскости.

Случай $r = 2$ является краеугольным камнем всей субримановой геометрии (субриманова структура на группе Гейзенберга).

В случае $r = 3$ получается нильпотентная субриманова структура с вектором роста $(2, 3, 5)$, дающая нильпотентную аппроксимацию системы, описывающей качение двух тел без прокручивания и проскальзывания (в своей знаменитой работе 1910 г. Э.Картан показал, что симметрии соответствующего распределения образуют 14-мерную простую алгебру Ли g_2, см. также [1]).

При $r < 4$ гамильтонова система для субримановых геодезических свободной нильпотентной субримановой структуры с алгеброй Ли L_2^r

интегрируема по Лиувиллю и проинтегрирована в следующих классах функций:

• $r = 1$: линейные функции,

• $r = 2$: тригонометрические функции,

• $r = 3$: эллиптические функции Якоби.

Основная цель доклада — рассказать о недавних результатах по случаю $r = 4$, т.е. о нильпотентной субримановой структуре с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$:

• модели алгебры Ли L_2^4 в терминах полиномиальных векторных полей в R^8 [2],

• функции Казимира и орбиты коприсоединенного представления [3],

• алгебра интегралов нормальной гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина, задающей субримановы геодезические [4].

Вопрос об интегрируемости по Лиувиллю указанной гамильтоновой системы остается открытым: для системы с 8-ю степенями свободы найдено 8 независимых интегралов, из которых в инволюции всего 7.

Автор надеется на помощь слушателей в этом вопросе об интегрируемости.

[1] Yu. Sachkov. Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356** (2004), 2: 457–494.

[2] Yu. Sachkov. On Carnot algebra with the growth vector $(2, 3, 5, 8)$, *submitted*, `arXiv:1304.1035v1 [math.OC] 3 Apr 2013`.

[3] Yu. Sachkov. Casimir functions and co-adjoint orbits on the Carnot group with the growth vector $(2, 3, 5, 8)$, *submitted*.

[4] Yu. Sachkov. Integrability of the free nilpotent sub-Riemannian problem with the growth vector $(2, 3, 5, 8)$, *in preparation*.

АНОРМАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ В НИЛЬПОТЕНТНОЙ СУБРИМАНОВОЙ СТРУКТУРЕ С ВЕКТОРОМ РОСТА $(2, 3, 5, 8)$

Е.Ф. Сачкова

(Институт Программных Систем РАН, Переславль-Залесский, Россия)

E-mail address: `elena.sachkova@gmail.com`

Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста $(2, 3, 5, 8)$ [1, 2, 3].

Описаны все анормальные траектории.

Доказано, что некоторые из анормальных траекторий строго анормальны, т.е. не являются проекцией нормальных траекторий.

[1] Yu. Sachkov. On Carnot algebra with the growth vector $(2,3,5,8)$, *submitted*, `arXiv:1304.1035v1 [math.OC] 3 Apr 2013`.

[2] Yu. Sachkov. Casimir functions and co-adjoint orbits on the Carnot group with the growth vector $(2,3,5,8)$, *submitted*.

[3] Yu. Sachkov. Integrability of the free nilpotent sub-Riemannian problem with the growth vector $(2,3,5,8)$, *in preparation*.

СЛОЕНИЯ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

И.С. Стрельцова

(Астраханский государственный университет, Астрахань, Россия)

E-mail address: `strelzova_i@mail.ru`

Согласно идеи В.В. Лычагина, слоения прямых на плоскости можно рассматривать как линии уровня $f(x,y) = \text{const}$ решений дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением флекса. Оно обладает замечательным свойством (см. [1]): если $f(x,y)$ — решение этого уравнения, то функция $\phi(f(x,y))$ также является его решением для любой (гладкой) функции ϕ. То есть преобразование $f \to \phi(f)$ является симметрией этого уравнения (см. [2]). После факторизации уравнения флекса по этой симметрии мы получаем уравнение Эйлера.

Это наблюдение позволило найти дифференциальные инварианты слоений и тканей прямых в классических геометриях на плоскости (проективной, евклидовой и т.п.)

[1] Goldberg V.V., Lychagin V.V. Geodesic Webs on a Two-Dimensional Manifold and Euler Equations // Acta Applicandae Mathematicae. 04/2012; 109(1):5-17. DOI:10.1007/s10440-009-9437-1.

[2] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К НАХОЖДЕНИЮ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ WDVV[4]

С. Тычков
(Институт проблем управления РАН, Москва, Россия)
E-mail address: `sergey.lab06@yandex.ru`

Мы рассматриваем уравнение WDVV, которое возникает в квантовой теории поля [1]:

$$u_{yyy} + u_{xxx}u_{xyy} - u_{xxy}^2 = 0. \tag{1}$$

При помощи системы компьютерной алгебры Maple нами была получена шестимерная алгебра Ли симметрий системы дифференциальных уравнений, содержащей (1).

$$\begin{cases} F_1 = u_{yyy} + u_{xxx}u_{xyy} - u_{xxy}^2 = 0, \\ F_2 = u_{xx}u_{yy} - \dfrac{3}{2}u_{xy}^2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

С помощью аппарата скобки Кругликова-Лычагина можно показать, что система (2) формально интегрируема. Откуда по теореме Ли-Бьянки [2] следует, что она имеет шесть первых интегралов, позволивших получить новое решение уравнения (1) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = C_3 - \dfrac{1}{8}t^2C_1 - \dfrac{1}{2}t^2s^3, \\ y = \dfrac{1}{4}t^3s^4 + \dfrac{1}{4}t^3C_1s + C_2, \\ u = s^2t^5\left(\dfrac{1}{32}s^5 + \dfrac{C_1}{40}s^3 + \dfrac{C_1^2}{2}\right) + st^3\left(\dfrac{C_4}{4}s^3 + C_1C_4\right) - \dfrac{C_5}{2}t^2(s^3 + C_1) + C_6. \end{cases}$$

[1] Dijgraf R., Verlinde E., Verlinde H. Notes on topological string theory and 2D quantum gravity // String theory and quantum gravity. 1991. Pp 91-156.

[2] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. Contact Geometry and Non-linear Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[4] Поддержано грантом РФФИ №12-08-01238-а

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УПРАЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ – СРАВНИТЕЛЬНЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ[5]

Г. Яковенко
(Московский физико-технический институт, Москва, Россия)
E-mail address: yakovenkog@gmail.com

Системе обыкновенных дифференциальных уравнений соответствует однопараметрическая группа сдвигов вдоль решений системы и множество преобразований симметрии, которое нельзя вместить ни в какую конечно-параметрическую группу [1].

Для системы с управлением "в общем положении" типична обратная картина: множество сдвигов вдоль решений выходит за рамки любой конечно-параметрической группы, единственное преобразование симметрии по состоянию – тождественное[2].

Вводится класс групповых систем, у которых совокупность сдвигов вдоль решений – конечно-параметрическая группа, но группа симметрий в норме - тривиальна. Показывается, что редукцией — уменьшением размерности - или "антиредукцией" — добавлением уравнений — групповой системе можно адекватно сопоставить систему (L-систему) у которой обе группы — сдвигов и симметрий — конечномерны с совпадающим количеством параметров, и это количество равно размерности пространства состояний, т.е. обе группы просто транзитивны. Уравнения L-систем с точностью до преобразования переменных состояния определяются набором чисел – структурными постоянными двух вышеупомянутых групп. Уравнения групп являют собой конечную связь "вход-выход", эквивалентную дифференциальным уравнениям L-системы, что дает возможность нетрадиционно отнестись к вопросу о фундаментальных системах решений. Совпадающая алгебраическая структура групп сдвигов и симметрий – подгруппы, нормальные делители и т.д. – позволяет целенаправленно строить замены переменных, декомпозирующие L-систему. Управляющие параметры у L-систем приобретают алгебраический характер: каждому конкретному управлению соответствует элемент алгебры Ли, сопутствующей группам сдвигов и симметрий. В этом смысле понимается высказывание: множество значений для допустимых управлений принадлежит подалгебре и т.д.

[5]Поддержано грантом РФФИ №13-01-00288

Изучен, в частности, в зависимости от расположения в алгебре Ли множества допустимых управлений вопрос о наличии у L-системы первых интегралов.

[1] Овсянников Л.В.: Групповой анализ дифференциальных уравнений. М: Наука, 1978, 400с.

[2] Яковенко Г.Н.: Теория управления регулярными системами - М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, 264 с.

PROJECTIVE DIFFERENTIAL INVARIANTS AND SHAPE SPACES[6]

N. Konovenko
(Odesa National Academy of Food Technologies, Odesa, Ukraine)
E-mail address: konovenko@ukr.net

V. Lychagin
(Institute of Control Sciences, Moscow, Russia and TromsøUniversitet, Tromsø, Norway)
E-mail address: valentin.lychagin@uit.no

In paper ([1]) devoted to computer vision authors studied the space of shapes and introduced "fingerprints" of shapes in terms of infinite dimensional homogeneous space $\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)\diagup\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$. This space, as well as $\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)\diagup\mathbf{S}^1$, are the more known examples of applications the Kirillov's orbit method ([2],[4]) to infinite dimensional Lie groups (Virasoro group).

Computing the algebra of projective differential invariants ([3]) we show that homogeneous space $\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)\diagup\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$ coincides with the jet-space of quadratic differentials on the circle. This description allows us to find an invariant Poisson structure on $\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)\diagup\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})$. Some integrable systems, like KdV, are integrable Hamiltonian systems for this structure.

We consider also refined version of the shape space:

$$\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R})\diagdown\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)\diagup\mathbf{PSL}_2(\mathbb{R}).$$

To describe the last space we find the algebra of two-sided projective differential invariants which generated by a basic differential invariant of order 5

[6]Supported by RFBR (grants 11-01-93106-НЦНИЛ_а, 12-01-00886-а, 12-08-01238-а)

$$\mathbf{J}_5 = \mathbf{S}^{-3}\left(\mathbf{S}\,\frac{d^2\mathbf{S}}{dx^2} - \frac{5}{4}\left(\frac{d\mathbf{S}}{dx}\right)^2\right),$$

and an invariant derivation of order 3 :

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S}}}\frac{d}{dx},$$

where

$$\mathbf{S} = \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2$$

is the the Schwarzian derivative.

[1] Sharon, E., Mumford, D. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping, International Journal of Computer Vision, 70(1), 55–75, (2006)

[2] Kirillov, A.A. Geometric approach to discrete series of unireps for Vir, J. Math. Pures Appl., 11, p. 135-146, (1998)

[3] Konovenko N. Projective structures and algebras of their differential invariants – Acta Applicandae Mathematicae, 109, 1 , 87-99 ,(2010)

[4] Witten, E. Coadjoint Orbits of the Virasoro Group, Commun. Math. Phys., 114, 1-53, (1988)

THE ALGEBRA OF CONTACT SYMMETRIES OF THE STEADY TRANSONIC FLOW EQUATION

M. Laskova

(Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: laskovayamaya@moscow-index.ru

K. Malkina

(Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: kristinakonkina@rambler.ru

The article presents the algebra of contact symmetries of the equation of steady transonic flow

$$v_{yy} + \frac{a}{y}v_y + bv_xv_{xx} = 0.$$

This equation is a special case of Monge-Ampere's equations. The corresponding effective 2-form is the following:

$$\theta = p_2dx_1 \wedge dx_2 + x_2dx_1 \wedge dp_2 - p_1dx_2 \wedge dp_1.$$

The generating functions of this equation's symmetries are solutions of the Lie equation (see [1])

$$(L_X(\theta))_\epsilon = h\theta,$$

where h is an arbitrary function. The solutions of this equation form a finite dimensional Lie algebra with the following basis:

$$f_1 = p_2^{\frac{a-1}{a}},\ f_2 = x_2^{1-a},\ f_3 = p_1x_1 + u + 4x_2p_2,\ f_4 = p_1,\ f_5 = x_2p_2 + u,\ f_6 = 1.$$

[1] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

ON EINSTEIN-MAXWELL EQUATIONS

V. Yumaguzhin

joint work with V. Lychagin

(Program Systems Institute of RAS, Pereslavl'-Zalesskiy, Russia)

E-mail address: `yuma@diffiety.botik.ru`

In [1], we propose a complex of differential operators, which allow as to obtain complete description of formal solutions of the Cauchy problem for the vacuum Einstein equations in the terms of corresponding spectral sequences of this complex.

In this talk, we represent a similar complex for the Einstein-Maxwell equations. cohomologies of its symbolic complex, and transfer operators for this equations.

[1] Valentin Lychagin, Valeriy Yumaguzhin, *Cohomological uniqueness of the Cauchy problem solutions for the Einstein equation*, Journal of Geometry and Physics, Vol. 62, No. 10, October 2012, pp. 2099–2120.

Содержание

Тезисы докладов международной конференции

КОМПЬЮТЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Сочи, 3 – 10 мая 2013 г.

под редакцией А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина

TEX-нический редактор Е.Н. Кушнер.

Тираж 50 экз.
Усл. печ. л. 1,75